LES VECTEURS - GÉNÉRALITÉS

Objectifs du COURS :

Ce cours sur les vecteurs traitera essentiellement les points suivants :

- Définitions des notions de scalaire et de vecteur
- Description des principales opérations réalisées sur les vecteurs, et les coordonnées cartésiennes d'un vecteur
- Définitions du produit scalaire de deux vecteurs
- Exercices d'application.

Comment représenter la direction et l'intensité d'une force agissant sur un objet ? Comment définir l'action résultante de plusieurs forces agissant sur une même structure ? Comment décrire la position d'un avion par rapport à un aéroport et définir sa vitesse ?

Réponse : **les vecteurs.**

SCALAIRES

Les scalaires sont des nombres positifs, négatifs ou nuls, utilisés pour représenter des quantités diverses : temps, température, masse, énergie, volume, …
Par exemple, les nombres 20, 18, 50 sont les scalaires des grandeurs suivantes : hauteur de 20 m, volume de 18 m^3, force de 50 N.

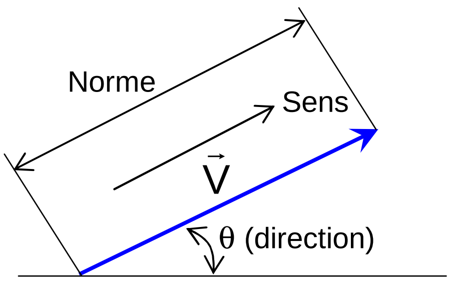
VECTEURS

Un vecteur est une grandeur définie par une direction, un sens et une norme.

La direction est la droite qui porte le vecteur. Elle est définie par l'angle θ.

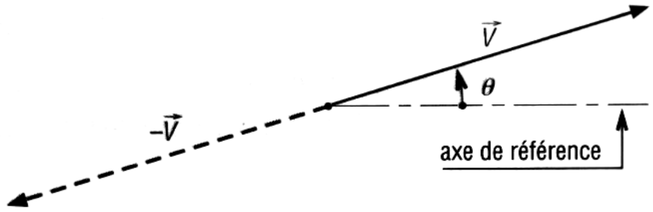
Le sens représente l'orientation origine-extrémité du vecteur et est symbolisé par une flèche.

La norme ou module, représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur. Graphiquement, elle correspond à la longueur de celui-ci. Notation : $\boxed{\|\vec{V}\|}$.



Caractéristiques d'un vecteur

Le point d'application est le point qui sert d'origine à un représentant (ou image) du vecteur.



Vecteur $\vec{V}$ et son opposé ($-\vec{V}$)

OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS

ADDITION

Des vecteurs de même nature peuvent être additionnés pour former un troisième vecteur appelé vecteur-somme.

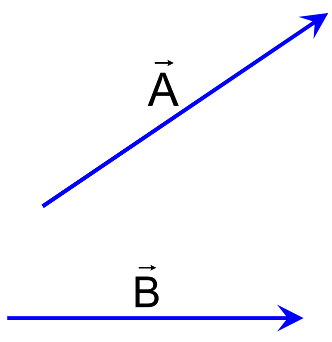
Remarque : l'addition peut être réalisée à partir d'un triangle de construction (conditions : $\vec{A}$ et $\vec{B}$ du triangle doivent être parallèles et de mêmes longueurs que les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ d'origine).

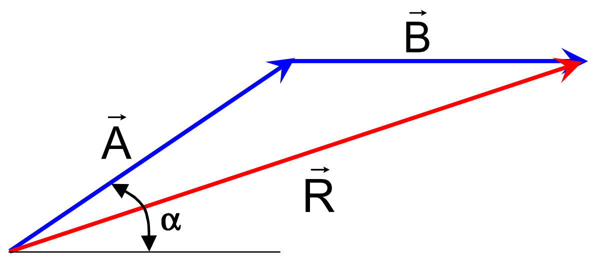
Exemple :

- déterminer graphiquement la somme $\vec{R}$ des deux vecteurs $\vec{A} + \vec{B}$ ci-dessous :

Échelle : 1 mm ~ 1N

Triangle de construction





$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

$\|\vec{R}\| = 81$ N

- déterminer par le calcul la somme $\vec{R}$ des deux vecteurs $\vec{A} + \vec{B}$ ci-dessus :

$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \alpha = 46^2 + 39^2 + 2x46x39 \cos 36 = 2116 + 1521 + 3588 \cos 36 = 6539{,}75$

$R = \sqrt{6539{,}75} = 80{,}86$ N

SOUSTRACTION

La différence entre deux vecteurs se ramène à une addition en ajoutant le vecteur opposé.

Exemple :

- déterminer graphiquement la soustraction $\vec{R}$ des deux vecteurs $\vec{A} - \vec{B}$ ci-dessous :

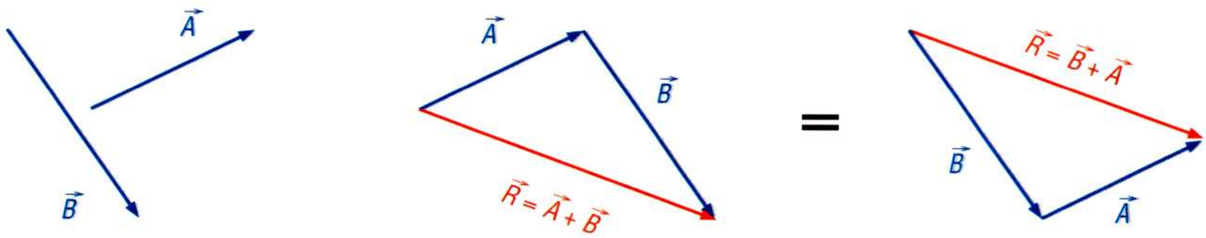
Échelle : 1 mm ~ 1N

$$\boxed{\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{R}}$$

$$\boxed{\|\vec{R}\| = 22 \text{ N}}$$

COMMUTATIVITÉ

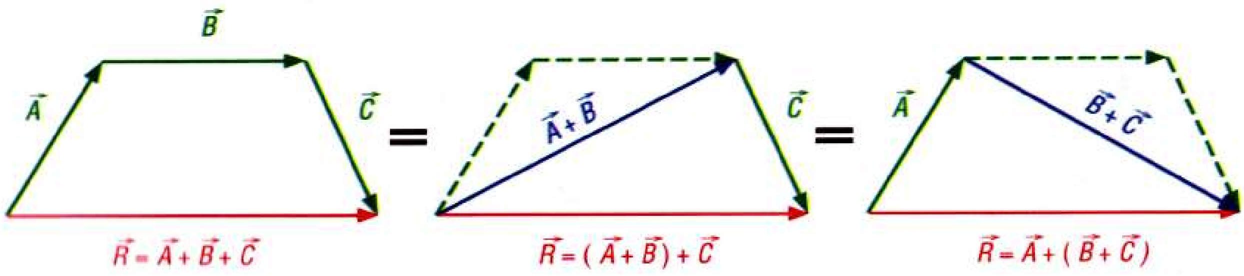
L'opération d'addition sur les vecteurs est commutative.



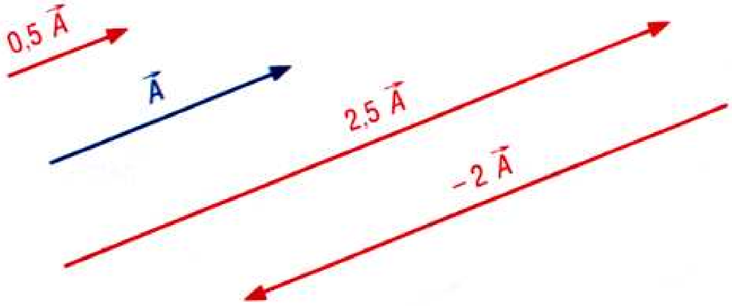
$$\boxed{\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = \vec{R}}$$

ASSOCIATIVITÉ

L'opération d'addition sur les vecteurs est associative.

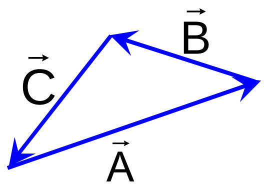


MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN SCALAIRE



Les sommes ($\vec{A}+\vec{A}$) et ($\vec{B}+\vec{B}+\vec{B}$) s'écrivent simplement sous la forme $2\vec{A}$ et $3\vec{B}$, produit des scalaires 2 et 3 par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
Si $\vec{A}$ a pour intensité 100 N, les intensités de $0,5\vec{A}$, $2,5\vec{A}$ et de $-2\vec{A}$ seront respectivement de **50 N, 250 N et 200 N.**

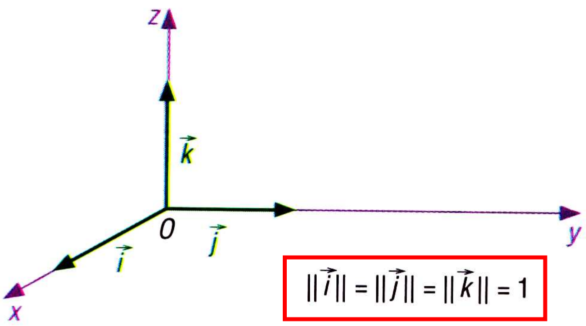
VECTEUR NUL



$$\boxed{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}}$$

COORDONNÉES CARTÉSIENNES D'UN VECTEUR

VECTEURS UNITAIRES



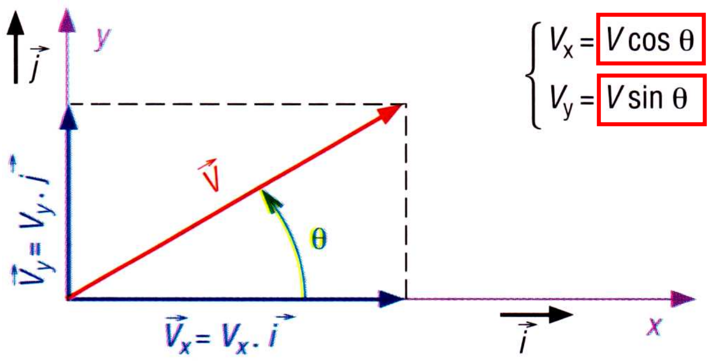
$$\boxed{\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1}$$

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ **sont des vecteurs unitaires d'intensité égale à 1.**
$\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs de base du repère orthonormé (O, x, y, z).

Remarque :

Les vecteurs unitaires des axes x, y, z sont parfois notés $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$.

COORDONNÉES DANS LE PLAN



Dans le plan, le vecteur $\vec{V}$ a deux coordonnées $\vec{V}_x$ et $\vec{V}_y$.

$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$

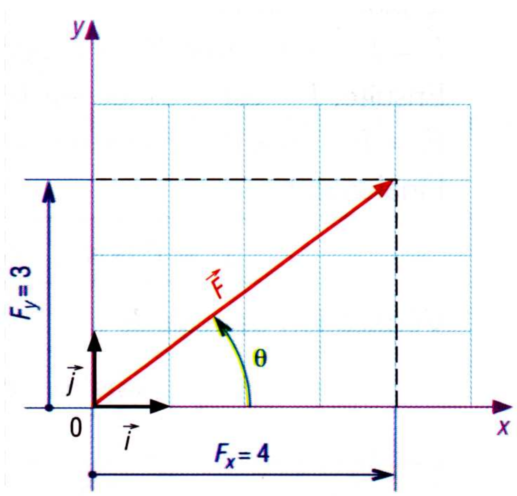
$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j}$

Direction : $\tan\theta = \dfrac{V_y}{V_x}$

Norme : $\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

EXERCICE D'APPLICATION

Déterminer la norme et la direction du vecteur $\vec{F}$ ayant pour coordonnées cartésiennes 4 suivant *x* et 3 suivant *y*.



Direction :

$\vec{F} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

$\tan\theta = \dfrac{F_y}{F_x} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

$\vec{F}$ a un angle de $\theta = 36{,}87°$ par rapport à (O, x).

Norme :

$\|\vec{F}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

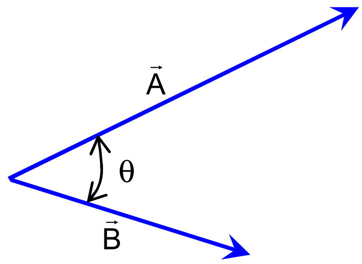
Le produit scalaire du vecteur $\vec{A}$ par le vecteur $\vec{B}$, noté $\vec{A} \cdot \vec{B}$, **est égal au produit des modules des deux vecteurs multiplié par le cosinus de l'angle (θ) entre leurs directions respectives.**

$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot \cos\theta$

Remarques :

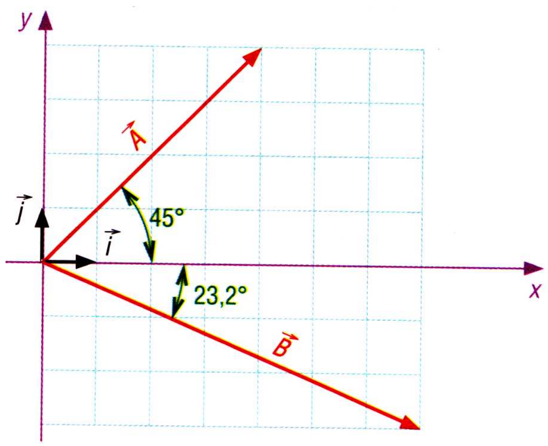
Le produit des deux vecteurs est un nombre ou un scalaire et pas un autre vecteur.
Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires (θ=90°), alors
$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot \cos 90° = 0$.

Le produit scalaire est commutatif :
$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$



EXERCICE D'APPLICATION

Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ci-dessous.



$\vec{A} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$

$\vec{B} = 7\vec{i} - 3\vec{j}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (4x7) - (4x3) = 16$

Remarques :

$||\vec{A}|| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5,66$

$||\vec{B}|| = \sqrt{3^2 + 7^2} = 7,62$

$\theta = 45° + 23,2° = 68,2°$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 5,66 \times 7,66 \cos 68,2° = 16$

QCM - EXERCICES D'APPLICATIONS

Question 1 *(encadrer la ou les bonnes affirmations)*

Un vecteur est défini par :

- une direction et une norme
- une direction, une norme et un sens
- une direction, une norme, un module et un sens
- une direction, une norme, un module, un sens et un poit d'application

Question 2 *(encadrer la ou les bonnes affirmations)*

Un vecteur unitaire est un vecteur :

- d'intensité égale à l'unité ou 1
- de norme ou de module égale à 1
- unique devant rester seul

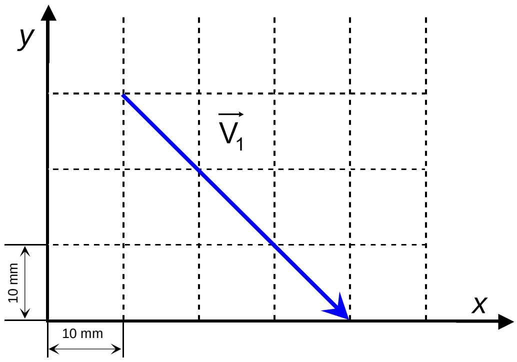
Question 3 *(encadrer la ou les bonnes affirmations)*

Un scalaire est :

- un nombre arithmétique ou algébrique représentant une quantité
- un vecteur particulier
- un poisson plat

Question 4

Rechercher ci-dessous les projections de $\overrightarrow{V_1}$ sur *x* et *y*.



1 mm ~ 1 N

V_{1x}= 3 V_{1y}= 3 $\|\overrightarrow{V_1}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 4{,}24$ N