CINÉMATIQUE : MOUVEMENTS DE TRANSLATION

Objectifs du COURS :

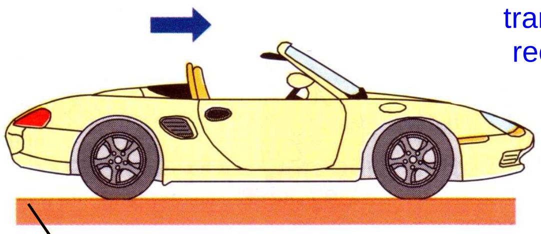
Ce cours traitera essentiellement les points suivants :

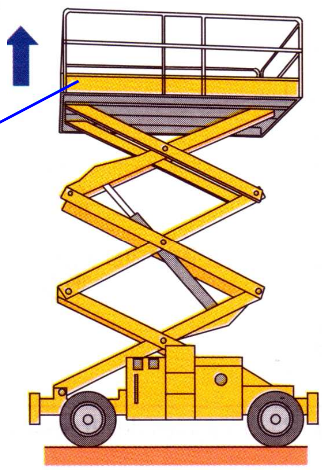
- Propriétés correspondant aux mouvements de solides en translation
- Définitions des vitesses et des accélérations dans le cas des translations rectilignes
- Mouvement rectiligne uniforme et mouvement rectiligne uniformément accéléré
- Exercices d'application

D'une manière générale, lorqu'un solide est en translation, chaque ligne de celui-ci se déplace parallèlement à sa position initiale au cours du temps. Aucune ligne ne subit la moindre rotation.
Les lignes verticales restent verticales, les horizontales restent horizontales, …, pendant toute la durée du mouvement, quelles que soient les vitesses et les accélérations. Par exemple les lignes horizontales de la carosserie d'une automobile en mouvement sur une route horizontale droite vérifient cette propriété. Le mouvement est appelé **translation rectiligne** et chaque point du véhicule suit une ligne trajectoire droite dans le sens du mouvement.

Dans **les mouvements de translations curvilignes**, si l'orientation de chaque ligne du solide est encore fixe (pas de rotation), les trajectoires des points ne sont plus des droites parallèles.

Remarque : en cinématique plane, il suffira de montrer qu'une seule droite du solide en mouvement vérifie la propriété précédente de parallèlisme pour affirmer qu'il y a translation.

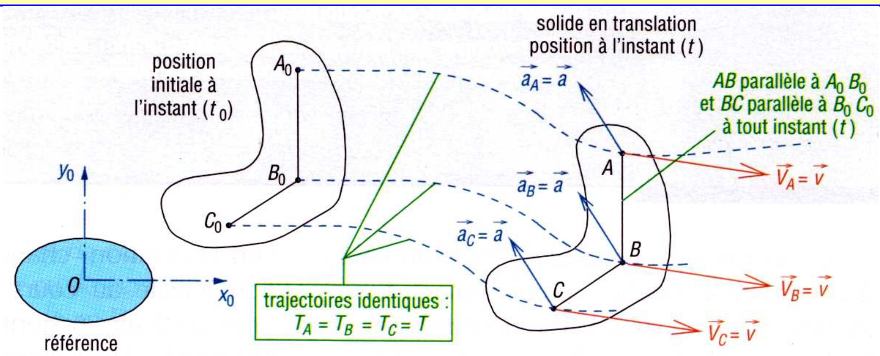




TRANSLATION DES SOLIDES

Lorsqu'un solide est en translation, chaque ligne de celui-ci se déplace parallèlement à sa position initiale au cours du temps.

PROPRIÉTÉS



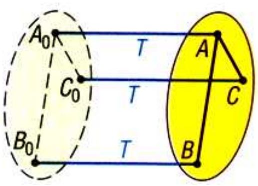
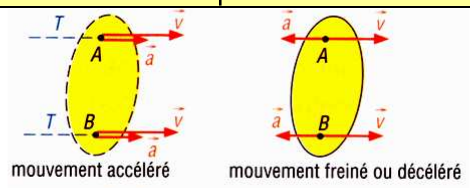
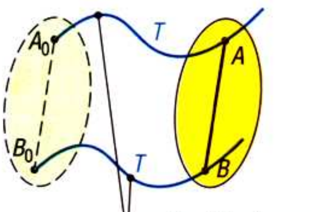
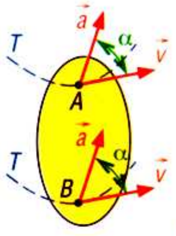
- **Tous les points du solide en translation ont des trajectoires identiques : $T = T_A = T_B = \ldots$**
- **Tous les points du solide ont même vitesse $\vec{v}$: $\vec{v} = \vec{V_A} = \vec{V_B} = \ldots$**
- **Tous les points du solide ont même accélération $\vec{a}$: $\vec{a} = \vec{a_A} = \vec{a_B} = \ldots$**
- **Le mouvement de translation d'un solide est complètement défini par le mouvement de l'un quelconque de ses points.**

DIFFÉRENTS CAS

Schématiquement, on distingue deux grandes familles de translations :

LES TRANSLATIONS RECTIGNES

Les trajectoires (T) des points sont des droites ou des segments parallèles.

Cas	Trajectoires	Propriétés
Translation rectiligne	$A_0C_0 // AC$ $A_0B_0 // AB$ $A_0A = B_0B = C_0C = T$ 	
Translation curviligne	$AB // A_0B_0$ 	

LES TRANSLATIONS CURVILIGNES

Les trajectoires des points sont des courbes géométriquement quelconques identiques du plan ou de l'espace.

Exemple : *translation curviligne pour laquelle les trajectoires T sont des cercles ou des arcs de cercle identiques de même rayon.*

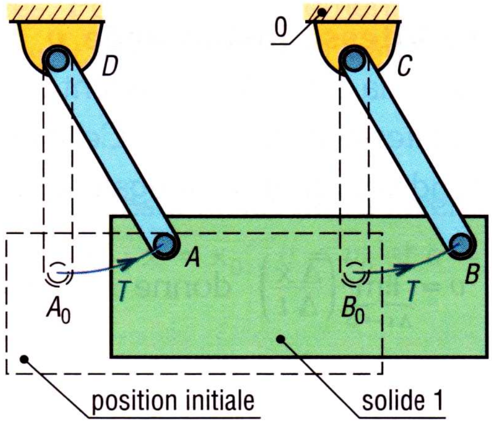
Remarque : une translation curviligne ne doit pas être confondue avec une rotation.

Le solide (1) suspendu en A et B par deux barres AD et BC, est en translation circulaire par rapport au bâti fixe (0).
ABCD est **un parallèlogramme.**
Toutes les trajectoires sont des arcs de cercle de rayons R = AD = BC = …

La vitesse $\vec{v}$ est **tangente** aux trajectoires.

En A et B, $\vec{v}$ est aussi **perpendiculaire** à AD et BC.

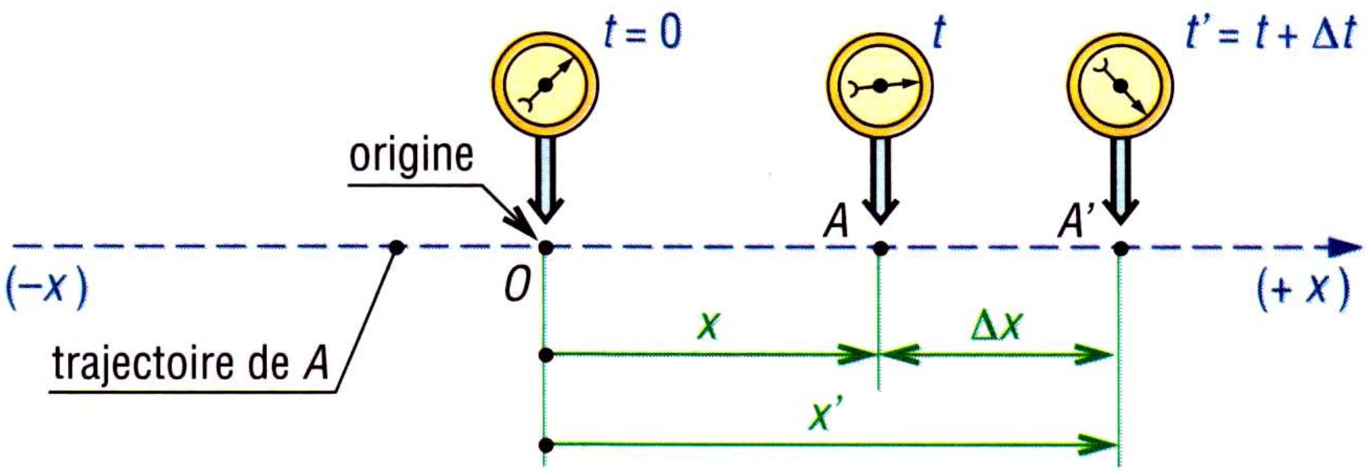
L'accélération $\vec{a}$ est orientée **vers l'intérieur des cercles.**



Exemple de translation curviligne (ou circulaire)

CAS DES TRANSLATION RECTILIGNES

Les propriétés et les résultats ci-dessous sont applicables à un solide en translation rectiligne, mais aussi à un point matériel se déplaçant sur une ligne droite.



La position du solide ou du point matériel (A), à l'instant t, est définie par la distance (ou abscisse) x, mesurée à partir du point O pris comme référence ou origine.
À l'instant suivant t' (t' = t + Δt), A s'est déplacé et occupe la position A' à x' de O.
Le déplacement de A à A' est **Δx = x' - x** et a été effectué pendant la durée **Δt = t' - t.**

VITESSES EN A

Vitesse moyenne (v_{moy})
La vitesse moyenne de A entre les instants t et t' est égale à la distance parcourue divisée par le temps mis pour parcourir cette distance.

$$\boxed{v_{moy} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ (en m/s)}}$$

EXERCICE D'APPLICATION

Sur un tronçon d'autoroute parfaitement rectiligne, un véhicule parcourt 5 km en 3 minutes 20 secondes.

Question

Déterminer la vitesse moyenne.

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5000}{3x60 + 20} = 25 \text{ m/s}$$

Remarque : **la vitesse moyenne ne décrit pas les fluctuations du véhicule (ralentissement, accélération, arrêts). Ce sera le rôle de la vitesse instantanée.**

Vitesse instantanée (v)
Dans la formule précédente, plus Δt est petit, plus la vitesse moyenne se rapproche de la vitesse instantanée. Celle-ci s'obtient par passage à la limite (Δt tendant vers 0, ou t' tendant vers t) et v est égale à la dérivée de x par rapport au temps.

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}}$$

ACCÉLÉRATIONS EN A

Les accélérations traduisent les variations de la vitesse. L'accélération moyenne a_{moy} entre l'instant t et t' est égale à la variation de la vitesse ($\Delta v = v' - v$) divisée par Δt. Si on fait tendre Δt vers 0, l'accélération moyenne tend vers l'accélération instantanée a (dérivée de v par rapport au temps t).

$$\boxed{a_{moy} = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ en m/s}^2}$$

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ en m/s}^2}$$

Remarque : si a est positif, le mouvement est accéléré et la vitesse v augmente progressivement. Si a est négatif, le mouvement est décéléré, freiné ou ralenti et v diminue progressivement.

Si on élimine dt des relations $v = \frac{dx}{dt}$ et $a = \frac{dv}{dt}$, on obtient : **$v \cdot dv = a \cdot dx$**

vdv est la dérivée de l'énergie cinétique : $E_C = \frac{1}{2} mv^2$ (en prenant la masse m = 1 kg)

MOUVEMENTS RECTILIGNES PARTICULIERS

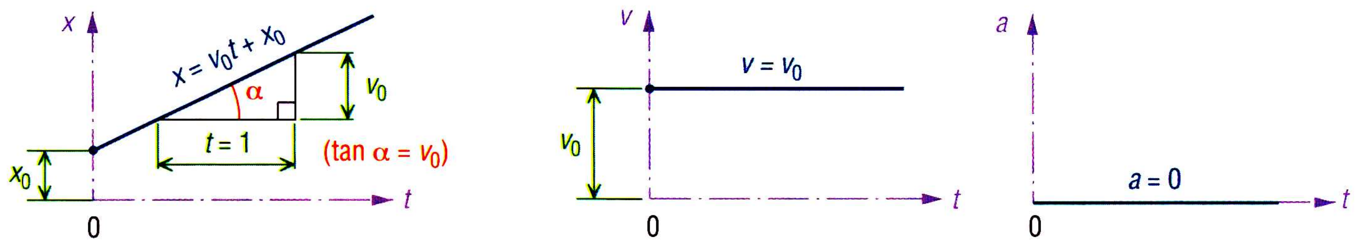
MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

C'est le mouvement le plus simple, sans accélération (a=0) et avec une vitesse constante au cours du temps.

Équations de mouvement :

$a = 0$	**x_0 : déplacement initial à t = 0**
$v = v_0$ = constante	**v_0 : vitesse initiale et vitesse du mouvement**
$x = v_0 t + x_0$	**x : déplacement à l'instant t**

Allure typique des graphes : Translation rectiligne uniforme



MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ

Il sert de modèle à de nombreuses études simplifiées. Pour ces mouvements, accélérés (a>0) ou décélérés (a<0), l'accélération a reste constante au cours du temps.

Équations de mouvement :

$a = a_0$ = constante
$v = at + v_0$
$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

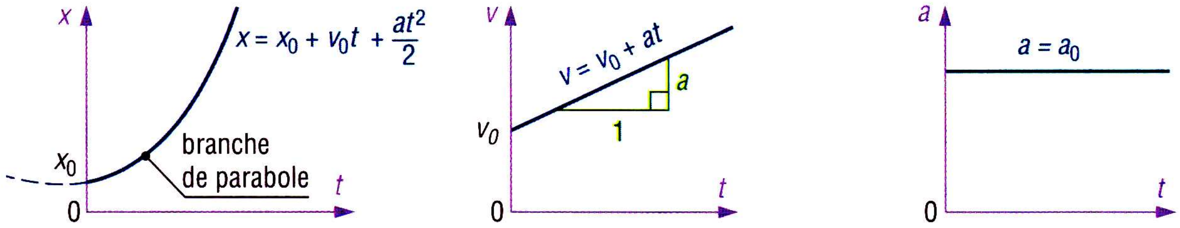
Conditions initiales du mouvement :

à $t = 0$; $x = x_0$; $v = v_0$ et $a = a_0$

Formule utile : (indépendante du temps)

$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

Allure typique des graphes : Translation rectiligne uniformément accélérée

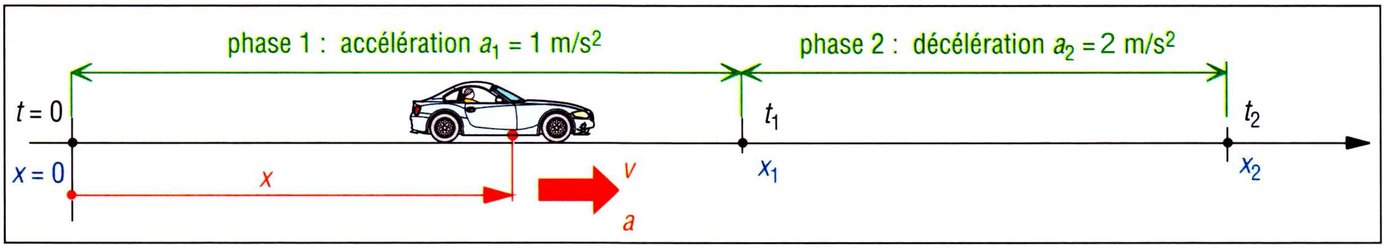


EXERCICE D'APPLICATION N°1

Une automobile accélère de 1 m/s^2 pour atteindre 90 km/h puis décélère de 2 m/s^2 jusqu'à l'arrêt.

Question

Pour chaque phase, déterminer les distances parcourues et les temps mis.



Phase 1, accélération :

L'automobile est à l'arrêt et atteint les 90 km/h avec une accélération de 1 m/s^2.

$v = v_0 + a_1 t = v_0 + 1t$; à $t = 0$: $v = v_0 = 0$; ce qui donne $\underline{v = t}$

$x = x_0 + v_0 t + 1 \times 0,5t^2$; à $t = 0$, $x = 0$; ce qui donne $x_0 = 0$ et $\underline{x = 0,5t^2}$

à $t = t_1$; $v = 90000/3600 = 25$ m/s ; d'où $\underline{t_1 = 25 \text{ s}}$ et $\underline{x_1 = 0,5 \times 25^2 = 312,5 \text{ m}}$

Phase 2, décélération :

L'automobile roule à la vitesse de 90 km/h puis décélère de 2 m/s^2 jusqu'à l'arrêt.

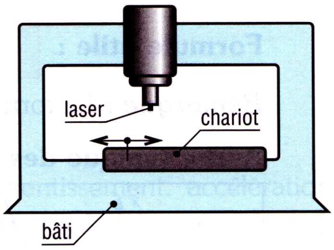
$v = v_0 + a_2 t = v_0 - 2t$; à $t_1 = 25$, $v = 25$ m/s ; ce qui donne $\underline{v_0 = 25 + 50 = 75}$ et $\underline{v = -2t + 75}$

$x = x_0 + v_0 t - 2t^2/2$; à $t_1 = 25$; $x_1 = 312,5$; ce qui donne $\underline{x_0 = 312,5 + 625 - 75 \times 25 = -937,5}$

$x = -t^2 + 75t - 937,5$; à $t = t_2$; $v = 0 = 75 - 2t_2$ d'où $t_2 = 75/2 = \underline{37,5 \text{ s}}$

$x_2 = -37,5^2 + 75 \times 37,5 - 937,5 = \underline{468,75 \text{ m}}$

EXERCICE D'APPLICATION N°2



Le chariot d'une machine pour découpage laser atteint la vitesse de 10 cm/s en 2 secondes. Le chariot évolue à la vitesse constante pendant 8 secondes, puis s'arrête en l'espace de 12,5 cm. Les accélérations et décélérations sont supposées constantes.

Question 1

Déterminer les équations de mouvement pour chacune des trois phases.

Phase 1 : accélération

Le chariot atteint la vitesse de 10 cm/s en 2 secondes.

$v = v0 + at$; $10 = 0 + a \times 2$; $2a = 10$; $a = 5$ cm/s^2
$v = 5t$

$x = x_0 + v_0 t + at^2/2$; $x = 0 + 0 \times t + 5t^2/2$; $x = 20/2 = 10$ cm
$x = 2{,}5t^2$

Phase 2 : translation uniforme

Le chariot se déplace pendant 8 secondes à vitesse constante.

$a = 0$

$v = v_0 = 10$ cm/s

$x = v_0 t + x_0 = 10t + x_0$; à $t = 2$ on a $x = 10$; $x_0 = 10 - 10t = 10 - 20 = -10$

$x = 10t – 10$

Phase 3 : décélération

Le chariot ralentit pour passer de 10 cm/s à 0 sur 12,5 cm.

$v^2 = v_0^2 + 2a (x – x_0)$; $0 = 10^2 + 2a (12{,}5)$; $a = - 4$ m/s^2

$v = at + v_0 = -4t + v_0$

$v = -4t + 50$; $x = -2t^2 + 50t - 210$

Question 2

Représenter ci-dessous les graphes de l'accélération (a), de la vitesse (v) et de la distance (x) en fonction du temps (t).